KỲ VỌNG TRONG TRÒ VIETLOTT
Bài viết này chứng minh rằng kỳ vọng trúng khi mua vé 10.000 đồng là 2.843 đồng.
(đối với giải Jackpot 12 tỉ)

Phan Tấn Phú

Ngày 12 tháng 9 năm 2017

Bạn đã từng thắc mắc rằng tại sao lại là chọn 6/45 quả cầu, tại sao người ta lại đưa ra cơ cấu giải thưởng như vậy, người ta đã tính toán như thế nào để đưa ra luật chơi mà tương lai họ không bị phá sản chưa?

Mời bạn đón đọc bài tiếp theo: *"Kỳ vọng vé số truyền thống là 5.000 đồng."*

Mục lục

1 Biến ngẫu nhiên rời rạc

Các khái niệm cơ bản của tổ hợp và xác suất như *hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, phép thử, không gian mẫu, biến cố, xác suất của biến cố* đã có trong sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 ban CƠ BẢN. Sau đây, tôi giới thiệu thêm 2 khái niệm mới là *biến ngẫu nhiên rời rạc, kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên* chỉ có trong sách giáo khoa ban NÂNG CAO.

Bài viết này chỉ dùng những kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, học sinh lớp 11 học xong chương tổ hợp và xác suất có thể đọc hiểu được.

1.1 Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Đại lượng X gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán được.

1.2 Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị thuộc tập hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Để hiểu rõ hơn về X, ta thường quan tâm đến xác suất để X nhận từng giá trị x_k. Các thông tin này được trình bày dạng bảng như sau đây và gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Trong bảng trên, tổng $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

2 Kỳ vọng

Kỳ vọng

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Kỳ vọng của X, kí hiệu là $E(X)$ là một số thực được tính theo công thức

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Ý nghĩa. Kỳ vọng của X cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X.

Nhận xét. Kỳ vọng của X không nhất thiết thuộc tập giá trị của X.

3 Kỳ vọng trong trò Vietlott 6/45

3.1 Luật chơi

Trong lồng cầu có 45 quả cầu được đánh số từ 01, 02, ..., 45. Nhà cái dùng máy bốc ngẫu nhiên 6 quả từ lồng cầu và được một dãy gồm 6 quả cầu (không phân biệt thứ tự) là kết quả xổ số. Người chơi mua một vé (giá 10 nghìn đồng) gồm 6 bộ số không trùng nhau, giống như chọn ngẫu nhiên 6 quả trong 45 quả cầu. Các giải thưởng như sau.

- Nếu trúng 3 trong 6 quả (không cần đúng thứ tự) thì trúng giải ba 30 nghìn.
- Nếu trúng 4 trong 6 quả (không cần đúng thứ tự) thì trúng giải nhì 300 nghìn.
- Nếu trúng 5 trong 6 quả (không cần đúng thứ tự) thì trúng giải nhất 10 triệu đồng.
- Nếu trúng 6 trong 6 quả (không cần đúng thứ tự) thì trúng giải Jackpot (đặc biệt) 12 tỉ đồng.

Trong đó,

- Trường hợp 1 vé trúng nhiều giải thì chỉ được lãnh 1 giải cao nhất.
- Nếu có nhiều người cùng trúng giải đặc biệt thì giải thưởng được chia đều.
- Giá trị giải đặc biệt có thể hơn 12 tỉ nếu kì trước không có người trúng giải và được cộng dồn cho kỳ sau.

Ta sẽ tính kỳ vọng trong trường hợp giải đặc biệt 12 tỉ.

3.2 Tính xác suất trúng các giải

Chọn ngẫu nhiên 6 quả trong 45 quả và không cần thứ tự nên số phần tử của không gian mẫu là
$$n(\Omega) = C_{45}^6 = 8145060.$$
Tất cả các trường hợp này là khác nhau và đồng khả năng xuất hiện.

Gọi A_6 là biến cố trúng giải Jackpot. Chỉ có 1 trường hợp trúng giải Jackpot nên $n(A_6) = C_6^6 = 1$. Từ đó, xác suất trúng Jackpot là

$$p_6 = p(A_6) = \frac{1}{C_{45}^6} = \frac{1}{8145060}.$$

Điều này cho ta thấy rằng cứ khoảng 8 triệu vé được bán thì trung bình sẽ có 1 vé trúng giải đặc biệt.

Gọi A_5 là biến cố trúng giải nhất. Để có đúng 5 quả trùng với kết quả quay thưởng, ta chọn 5 quả trong 6 quả trúng và chọn 1 quả trong 39 quả còn lại. Do đó, số cách chọn là $n(A_5) = C_6^5 \times C_{39}^1 = 6 \times 39 = 234$.

Xác xuất trúng giải nhất là

$$p_5 = p(A_5) = \frac{C_6^5 \times C_{39}^1}{8145060} = \frac{234}{8145060} \approx \frac{1}{34808}$$

Gọi A_4 là biến cố trúng giải nhì. Để có đúng 4 quả trùng với kết quả quay thưởng, ta chọn 4 quả trong 6 quả trúng và chọn 2 quả trong 39 quả còn lại. Do đó, số cách chọn là $n(A_4) = C_6^4 \times C_{39}^2 = 15 \times 471 = 7065$.

Xác xuất trúng giải nhì là

$$p_4 = p(A_4) = \frac{C_6^4 \times C_{39}^2}{8145060} = \frac{11115}{8145060} \approx \frac{1}{733}$$

Gọi A_3 là biến có trúng giải ba. Để có đúng 3 quả trùng với kết quả quay thưởng, ta chọn 3 quả trong 6 quả trúng và chọn 3 quả trong 39 quả còn lại. Do đó, số cách chọn là $n(A_3) = C_6^3 \times C_{39}^3 = 20 \times 9139 = 182780$.

Xác xuất trúng giải ba là

$$p_3 = p(A_3) = \frac{C_6^3 \times C_{39}^3}{8145060} = \frac{182780}{8145060} \approx \frac{1}{45}$$

Tính tương tự, ta có xác suất trùng 2 quả, 1 quả, 0 quả so với kết quả xổ số là

$$p(2) = \frac{C_6^2 \times C_{39}^4}{C_{45}^6} = \frac{1233765}{8145060} \approx \frac{1}{6,6}$$

$$p(1) = \frac{C_6^1 \times C_{39}^5}{C_{45}^6} = \frac{3454542}{8145060} \approx \frac{1}{2,36}$$

$$p(0) = \frac{C_6^0 \times C_{39}^6}{C_{45}^6} = \frac{3262623}{8145060} \approx \frac{1}{2,50}$$

Từ giá trị của p_i ta có nhận xét

- Mua 2,36 vé có hi vọng có 1 vé trúng 1 quả.
- Mua 6,6 vé có hi vọng có 1 vé trúng 2 quả.
- Mua 45 vé có hi vọng có 1 vé trúng 3 quả.
- Mua 733 vé có hi vọng có 1 vé trúng 4 quả.
- Mua 34808 vé có hi vọng có 1 vé trúng 5 quả.
- Mua 8145060 vé có hi vọng có 1 vé trúng 6 quả.

3.3 Bảng phân bố xác suất

Từ các kết quả tính xác suất ở phần trên, ta có bảng phân bố xác xuất của biến ngẫu nhiên rời rạc X như sau.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{3262623}{8145060}$	$\frac{3454542}{8145060}$	$\frac{1233765}{8145060}$	$\frac{182780}{8145060}$	$\frac{11115}{8145060}$	$\frac{234}{8145060}$	$\frac{1}{8145060}$

Ta thấy $1 + 234 + 11115 + 182780 + 1233765 + 3454542 + 3262623 = 8145060$.

Do đó tổng xác xuất ở hàng dưới là $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

3.4 Tính kỳ vọng số quả cầu trúng

Kỳ vọng số quả cầu trúng là $E(X) = \sum_{i=0}^{6} x_i p_i =$

$$= 0\times\frac{3262623}{8145060}+1\times\frac{3454542}{8145060}+2\times\frac{1233765}{8145060}+3\times\frac{182780}{8145060}+4\times\frac{11115}{8145060}+5\times\frac{234}{8145060}+6\times\frac{1}{8145060} = 0,8$$

Như vậy khi mua vé thì thường ta chỉ trúng 1 quả trong 6 quả.

3.5 Tính kỳ vọng số tiền trúng khi mua vé 10 nghìn đồng

Bảng phân bố xác suất trúng các giải

Y	0	0	0	30 nghìn	300 nghìn	10 triệu	12 tỉ
P	$\frac{3262623}{8145060}$	$\frac{3454542}{8145060}$	$\frac{1233765}{8145060}$	$\frac{182780}{8145060}$	$\frac{11115}{8145060}$	$\frac{234}{8145060}$	$\frac{1}{8145060}$

Kỳ vọng số tiền trúng khi mua 1 vé 10 nghìn là $E(Y) = \sum_{i=0}^{6} y_i p_i =$

$$= 0 \times \frac{3262623}{8145060} + 0 \times \frac{3454542}{8145060} + 0 \times \frac{1233765}{8145060} + 30000 \times \frac{182780}{8145060} + 300000 \times \frac{11115}{8145060} +$$
$$+10000000 \times \frac{234}{8145060} + 12000000 \times \frac{1}{8145060}$$
≈ 2843 (đồng).

4 Tóm lược kết quả

Khi mua vé 10.000 đồng, ta có các kỳ vọng số tiền trúng như sau.

- Với giải đặc biệt 12 tỉ, kỳ vọng là 2.843 đồng.
- Với giải đặc biệt 50 tỉ, kỳ vọng là 7.509 đồng.
- Với giải đặc biệt 100 tỉ, kỳ vọng là 13.647 đồng.
- Với giải đặc biệt 70 tỉ, kỳ vọng là 9.964 đồng.

Như vậy, chờ cho giải đặc biệt lên từ 70 tỉ trở lên hãy mua, khi đó người chơi và nhà cái thu lợi ngang ngửa nhau. Vấn đề là, những kì trước với giải thưởng thấp không ai mua thì tiền đâu mà nhà cái tăng giá trị giải đặc biệt lên?

Mời bạn đón đọc bài tiếp theo: *"Kỳ vọng vé số truyền thống là 5.000 đồng."*