

# Bảng biến thiên với T<sub>E</sub>X

Phan Tấn Phú  
phantanphu@gmail.com

Ngày 22 tháng 8 năm 2009

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Giới thiệu</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dùng tabvar.tex</b>	<b>2</b>
2.1	Cài đặt . . . . .	2
2.2	Cấu trúc của một bảng . . . . .	3
2.3	Thực hành . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Dùng Metapost</b>	<b>6</b>
3.1	Quy trình sử dụng . . . . .	6
3.2	Biên soạn file mp . . . . .	6
3.3	Một số bảng biến thiên tham khảo . . . . .	7
3.3.1	Hàm có khoảng không xác định . . . . .	7
3.3.2	Hàm phân thức . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Lời kết</b>	<b>9</b>

## Danh sách hình vẽ

1	Hàm bậc ba . . . . .	3
2	Hàm phân thức . . . . .	4
3	Bảng biến thiên của hàm số có khoảng không xác định . . . . .	5
4	Bảng biến thiên một hàm thông dụng . . . . .	7
5	Bảng biến thiên của hàm có khoảng không xác định . . . . .	8
6	Bảng biến thiên của hàm phân thức bậc 2 chia bậc 1 . . . . .	9

# Danh sách bảng

1	Ghi nội dung trong ô của bảng biến thiên . . . . .	4
2	Cách vẽ mũi tên . . . . .	4
3	Các dấu số đứng . . . . .	5
4	Các dấu số đứng kép có ghi hai bên . . . . .	5

## 1 Giới thiệu

Đã từ lâu, việc vẽ bảng biến thiên quả là một công việc không đơn giản chút nào đối với nhiều người. Với MS Word và MathType ta có thể vẽ được các bảng biến thiên nhưng chắc phải toát mồ hôi vì nó, đôi khi kết quả lại không như ý.

Đến thời điểm này, đã có một số gói để vẽ bảng biến thiên trong T<sub>E</sub>X, đa phần các gói đều do các tác giả người Pháp viết mà tài liệu hướng dẫn bằng tiếng Việt còn ít. Một số phương án đó là:

1. Sử dụng gói **tabvar** của Denis Léger
2. Sử dụng **metapost** với macro của Frédéric Mazoit
3. Sử dụng **tablora** của Guillaume CONNAN
4. Sử dụng gói **tabvar** của Daniel Flipo
5. Sử dụng gói **variations** của Christian Obrecht

Ở bài viết này, tôi sẽ giới thiệu phương án 1 và 2.

## 2 Dùng **tabvar.tex**

### 2.1 Cài đặt

Ta chỉ cần tải duy nhất file **tabvar.tex** (được viết bởi Denis Léger, download tại đây) về đặt cùng thư mục với file tex đang soạn. Trong file tex đang soạn dùng lệnh:

```
\input{tabvar.tex}
```

Phương án vẽ bảng biến thiên này sử dụng **pstricks** để vẽ. Vì vậy, bạn cần khai báo:

```
\usepackage{pstricks}
```

Khi biên dịch thì phải biên dịch sang DVI trước, khi muốn biên dịch sang PDF thì theo thứ tự DVI→PS→PDF.

## 2.2 Cấu trúc của một bảng

Một bảng biến thiên bao gồm các cột, các cột được phân cách bởi kí hiệu &. Chương trình tự động kẻ đường gạch đứng sau cột đầu tiên của bảng để thể hiện cột đầu tiên là tiêu đề các dòng của bảng biến thiên. Mỗi dòng được chia ra làm 3 phần: *phần đỉnh*, *phần giữa* và *phần đáy*. Để kết thúc một dòng thì dùng lệnh `\cr`. Lệnh vẽ bảng là:

```
\tabvar{%
... Nội dung của bảng ...
}
```

Phần giao của một dòng và một cột nào đó sẽ là một ô. Trong ô này ta có thể đặt văn bản, công thức, dấu (cộng, trừ), mũi tên, dấu gạch đứng (đơn, kép), ...

## 2.3 Thực hành

Đoạn mã sau đây cho kết quả như hình 1.

```
\tabvar{%
\tx{x}&\tx{-\infty}&&\tx{-1}&&\tx{1}&&\tx{+\infty}\cr
\tx{f'(x)}&&\tx{+}&\txt{0}&\tx{-}&\txt{0}&\tx{+}&\cr
\tx{f(x)}&\txb{-\infty}&\fm&\txh{2}&\fd&\txb{-2}&\fm&\txh{+\infty}\cr
}
```

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$-2$	$+\infty$	

Hình 1: Hàm bậc ba

Bảng 1 liệt kê các lệnh dùng để ghi nội dung vào các ô của bảng biến thiên.

Bảng 2 liệt kê các lệnh vẽ mũi tên.

Lệnh `\txt{0}` dùng để ghi số không có hai gạch nhỏ ở trên và dưới. Lệnh này hay dùng để xét dấu đạo hàm.

Ở hình 2 là ví dụ về bảng biến thiên của hàm phân thức, có được từ đoạn mã sau:

```
\tabvar{%
\tx{x}&\tx{-\infty}&&\tx{-2}&&\tx{-1}&&\tx{0}&&\tx{+\infty}\cr
\tx{f'(x)}&&\tx{+}&\txt{0}&\tx{-}&\dbt&\tx{-}&\txt{0}&\tx{+}&\cr
}
```

Lệnh	Ý nghĩa
<code>\tx{}</code>	Đặt nội dung trong phần giữa của ô
<code>\txb{}</code>	Đặt nội dung trong phần đáy của ô
<code>\txh{}</code>	Đặt nội dung trong phần đỉnh của ô

Bảng 1: Ghi nội dung trong ô của bảng biến thiên

Lệnh	Ý nghĩa
<code>\fm</code>	Đi lên từ đáy đến đỉnh
<code>\fd</code>	Đi xuống từ đỉnh đến đáy
<code>\fhh</code>	Nằm ngang trong phần đỉnh
<code>\fhm</code>	Nằm ngang trong phần giữa
<code>\fhb</code>	Nằm ngang trong phần đáy
<code>\fmh</code>	Đi lên từ giữa đến đỉnh
<code>\fmb</code>	Đi lên từ đáy đến giữa
<code>\fdh</code>	Đi xuống từ đỉnh đến giữa
<code>\fdb</code>	Đi xuống từ giữa đến đáy

Bảng 2: Cách vẽ mũi tên

```
\tx{f(x)}&\txb{-\infty}&\fm&\txh{2}&\fd&\txdbtbbh{-\infty}{+\infty}&
  \fd&\txb{-2}&\fm&\txh{+\infty}\cr
}
```

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			2		
	$-\infty$				$+\infty$
				$+\infty$	
				$-2$	
					$+\infty$

Hình 2: Hàm phân thức

Bảng 3 liệt kê các cách dùng các dấu số đứng (trường hợp không có phần text ghi hai bên). Dấu số đứng này chỉ có tác dụng trên một dòng.

Bảng 4 liệt kê các cách vẽ dấu số đứng có ghi hai bên.

Hình 3 là bảng biến thiên của hàm số  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ . Bảng biến thiên này có phần tô xám (phần mà hàm số không xác định). Hình này có được từ đoạn mã sau:

```
\tabvar{%
\tx{x}&\tx{-\infty}&&\tx{-1}&\grise&\tx{1}&&\tx{+\infty}\cr
```

Lệnh	Ý nghĩa
<code>\traithaut</code>	Dấu số đứng đơn trong phần đỉnh của dòng
<code>\traitmilieu</code>	Dấu số đứng đơn trong phần giữa của dòng
<code>\traitbas</code>	Dấu số đứng đơn trong phần đáy của dòng
<code>\doubletraithaut</code>	Dấu số đứng kép trong phần đỉnh của dòng
<code>\doubletraitmilieu</code>	Dấu số đứng kép trong phần giữa của dòng
<code>\doubletraitbas</code>	Dấu số đứng kép trong phần đáy của dòng
<code>\trait</code>	Dấu số đứng đơn trong cả ba phần của dòng
<code>\dbt</code>	Dấu số đứng kép trong cả ba phần của dòng

Bảng 3: Các dấu số đứng

Lệnh	Ý nghĩa
<code>\txdbthb{texttrai}{textphai}</code>	<code>texttrai</code> ở phần đỉnh, <code>textphai</code> ở phần đáy
<code>\txdbthh{texttrai}{textphai}</code>	<code>texttrai</code> ở phần đỉnh, <code>textphai</code> ở phần đỉnh
<code>\txdbtbh{texttrai}{textphai}</code>	<code>texttrai</code> ở phần đáy, <code>textphai</code> ở phần đỉnh
<code>\txdbtbb{texttrai}{textphai}</code>	<code>texttrai</code> ở phần đáy, <code>textphai</code> ở phần đáy

Bảng 4: Các dấu số đứng kép có ghi hai bên

```
\tx{f'(x)}&&\tx{+}&&\grise&&\tx{+}&\cr
\tx{f(x)}&\txb{1}&\fm&\txh{+\infty}&\grise&\txb{0}&\fm&\txh{1}&\cr
}
```

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+	
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	1

Hình 3: Bảng biến thiên của hàm số có khoảng không xác định

Như vậy, lệnh `\grise` dùng để tô xám một ô.

Còn nhiều ví dụ nữa có trong hướng dẫn sử dụng (bằng tiếng Pháp) của tác giả Denis Léger. Các bạn có thể tham khảo thêm ở đó.

## 3 Dùng Metapost

### 3.1 Quy trình sử dụng

Quy trình vẽ bảng biến thiên bằng **metapost** được thực hiện qua ba bước như sau:

1. Soạn một file có phần mở rộng là \*.mp, chẳng hạn **bbt.mp** và đặt trong một thư mục nào đó, chẳng hạn D:\
2. Biên dịch file **bbt.mp** để được file **bbt.1**
3. Chèn file **bbt.1** chứa hình vẽ bảng biến thiên vào file tex bằng lệnh

```
\convertMPtoPDF{bbt.1}{1}{1}
```

và biên dịch bằng Pdflatex

Ở bước 2, thông thường có hai cách dùng

1. Dùng Dos trong môi trường Windows, đánh lệnh **mpost D:\bbt.mp**
2. Dùng trình soạn thảo có sẵn chức năng gọi lệnh biên dịch metapost. Chẳng hạn trong **Texmaker**, vào menu **Tools -> MPost**. Cách này thực hiện được trong cả Windows và Linux.

Khi thực hiện bước 2, nếu hệ thống **T<sub>E</sub>X** của bạn chưa cài đặt **metapost** thì bạn sẽ nhận được yêu cầu cài đặt như việc cài đặt các gói bình thường khác.

Ở bước 3, trong phần khai báo của file tex cần nạp gói **graphicx** bằng lệnh

```
\usepackage{graphicx}
```

Nội dung của bảng biến thiên được soạn trong file **bbt.mp** ở bước 1. Phần sau đây sẽ giải thích việc này.

### 3.2 Biên soạn file mp

Trước tiên, bạn cần có file **bangbienthien.mp** được chỉnh sửa từ file **tableauVariation.mp** của Frédéric Mazoit bởi tôi (với mục đích chuyển các lệnh sang tiếng Anh cho thông dụng vì bản gốc tiếng Pháp). Bạn có thể vào <http://viettug.org> hoặc liên hệ với tác giả bài viết này qua email để có được file **bangbienthien.mp**.

Đặt file **bangbienthien.mp** cùng nơi với file **bbt.mp** và soạn nội dung file **bbt.mp** như ví dụ sau. Ví dụ này vẽ bảng biến thiên của một hàm số thông dụng trong chương trình trung học phổ thông.

```
input bangbienthien.mp; % nạp macro bangbienthien.mp
beginTable(1) % khi biên dịch sẽ xuất ra file bbt.1
% số tự nhiên này sẽ là phần mở rộng của file được xuất ra khi mpost

newLineVariable(btex $x$etex); % tạo dòng 1 cho biến x
val(btex $-\infty$ etex); % ghi kí hiệu âm vô cực vào đầu dòng 1
val(btex $5$ etex); % ghi tiếp số 5 vào dòng 1
val(btex $+\infty$ etex);

newLineSign(btex $y'$ etex); % tạo dòng 2 ghi dấu đạo hàm
plus; % ghi dấu cộng
unDefPoint; % thêm điểm không xác định
```

```

% dấu số kép được vẽ tự động
plus;

newLineVariation(btex  $y$  etex); % tạo dòng 3 để ghi giá trị vào đầu và cuối các mũi tên,
% chỉ cần ghi giá trị, các mũi tên được vẽ tự động
valPos(btex  $-\infty$  etex, 0); % ghi âm vô cực vào vị trí có độ cao 0
% tham số thứ 2 (độ cao) là số thực trong đoạn [0,1]
leftLimUnDef(btex  $+\infty$  etex, 1); % ghi vào bên trái điểm không xác định tại độ cao 1
unDefPoint; % khai báo điểm không xác định
% dấu số kép được vẽ tự động
rightLimUnDef(btex  $-\infty$  etex, 0); % ghi vào bên phải điểm không xác định tại độ cao 0
valPos(btex  $+\infty$  etex, 1);

endTable;
end

```

Được kết quả như hình 4.

$x$	$-\infty$	$5$	$+\infty$
$y'$	+		+
$y$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Hình 4: Bảng biến thiên một hàm thông dụng

### 3.3 Một số bảng biến thiên tham khảo

#### 3.3.1 Hàm có khoảng không xác định

```

input bangbienthien;
beginTable(1)

newLineVariable(btex  $x$  etex); % thêm một dòng mới cho biến
val("0"); % đặt số vào dòng của biến
val("2");
val("5");
val("8");
val(btex  $+\infty$  etex);

newLineSign(btex  $h'$  etex); % thêm dòng cho dấu của đạo hàm
plus; % vẽ dấu cộng
valBarre("0"); % số 0 ngăn giữa hai khoảng
minus; % vẽ dấu trừ
beginUnDef; % bắt đầu khoảng không xác định
endUnDef; % kết thúc khoảng không xác định,
% khoảng không xác định sẽ bị gạch chéo
plus;

newLineVariation(btex  $h$  etex); % thêm dòng sự biến thiên của hàm
% (dòng này có vẽ các mũi tên)
valPos("0",0); % đặt số 0 ở độ cao 0 (tại đầu mút mũi tên)
valPos("6",2/3); % đặt số 6 ở độ cao 2/3
% (tham số thứ hai của lệnh này quy định độ cao và phải là số từ 0 đến 1)

```

```

leftLimUnDef("0",0); % đặt số 0 bên trái khoảng không xác định tại độ cao 0
beginUnDef;
endUnDef;
rightLimUnDef("0",0); % đặt số 0 bên phải khoảng không xác định tại độ cao 0
valPos(btex $\infty$ etex, 1);

endTable;
end

```

Kết quả như hình 5.

$x$	0	2	5	8	$+\infty$
$h'$		+	0	-	
$h$					
	0	↗	↘	0	↗
		6			$+\infty$

Hình 5: Bảng biến thiên của hàm có khoảng không xác định

### 3.3.2 Hàm phân thức

```

input bangbienthien;
beginTable(1)
newLineVariable(btex $x$ etex);
val(btex $-\infty$ etex);
val("2");
val("5");
val("8");
val(btex $+\infty$ etex);

newLineSign(btex $y'$ etex);
plus;
valBarre("0");
minus;
unDefPoint;
minus;
valBarre("0");
plus;

newLineVariation(btex $$ etex);
valPos(btex $-\infty$ etex,0);
valPos("6",1);
leftLimUnDef(btex $-\infty$ etex, 0);
unDefPoint;
rightLimUnDef(btex $+\infty$ etex,1);
valPos("0",0);
valPos(btex $+\infty$ etex,1);
endTable;
end

```

Kết quả như hình 6.



$x$	$-\infty$	2	5	8	$+\infty$
$y'$		+	0	-	+
$y$					
	$-\infty$	↗	↘	↘	↗
		6		0	
				$+\infty$	$+\infty$

Hình 6: Bảng biến thiên của hàm phân thức bậc 2 chia bậc 1

## 4 Lời kết

Ở bài viết này, tôi chưa trình bày chi tiết hết các phương án đã liệt kê trong phần giới thiệu. Tuy nhiên, bấy nhiêu cũng đã tạm đủ để ta có các lựa chọn cho việc vẽ bảng biến thiên. Theo nhận xét chủ quan thì cách dùng `tabvar.tex` đơn giản nhưng kết quả chưa đẹp lắm, còn cách dùng `metapost` thì hơi phức tạp nhưng kết quả lại đẹp hơn.